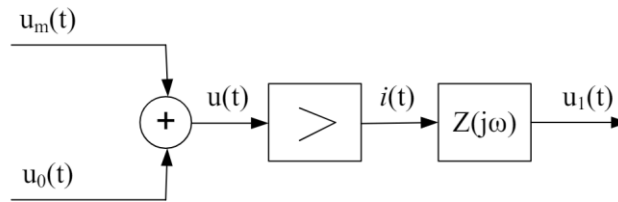


**Zadaci**

1. Signali  $u_m(t) = U_m \cos \omega_M t$  i  $u_0(t) = U_0 \cos \omega_0 t$  predstavljaju modulišući signal i nosilac. Njihove amplitude imaju vrijednosti  $U_m = 2 V$  i  $U_0 = 5 V$ , a učestanosti  $f_m = 1 kHz$  i  $f_0 = 1 MHz$ . Oba signala se dovode na ulaz nelinearnog pojačavača kako je prikazano na slici. Između struje na izlazu pojačavača  $i(t)$  i napona na ulazu postoji relacija:  $i(t) = a_1 u(t) + a_2 u^2(t)$ , gdje su  $a_1 = 2 mA/V$  i  $a_2 = 0.1 mA/V$ .
  - a) Izračunati učestanosti svih prostoperiodičnih komponenti struje  $i(t)$ .
  - b) Pronaći stepen modulacije i nacrtati približno vremenski oblik onog dijela struje  $i(t)$  koji predstavlja amplitudski modulisan signal.



Rješenje:

a)

$$\begin{aligned}
 i(t) &= a_1 u(t) + a_2 u^2(t) \\
 &= a_1 (U_0 \cos \omega_0 t + U_m \cos \omega_M t) \\
 &\quad + a_2 (U_0^2 (\cos \omega_0 t)^2 + 2U_0 U_m \cos \omega_0 t \cos \omega_M t + U_m^2 (\cos \omega_M t)^2) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Kako važi da je:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad (2)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos(x + y) + \frac{1}{2} \cos(x - y) \quad (3)$$

Izraz (1) se može napisati kao:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= a_1 U_0 \cos \omega_0 t + a_1 U_m \cos \omega_M t + a_2 U_0^2 \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} + a_2 U_m^2 \frac{1 + \cos 2\omega_M t}{2} \\
 &\quad + a_2 U_0 U_m \cos(\omega_0 + \omega_M)t + a_2 U_0 U_m \cos(\omega_0 - \omega_M)t \quad (4)
 \end{aligned}$$

Prema tome, učestanosti (frekvencije) prostoperiodičnih komponenti struje  $i(t)$  su:

$f_m$	$f_0$	$2f_m$	$2f_0$	$f_0 + f_m$	$f_0 - f_m$
1 kHz	1 MHz	2 kHz	2 MHz	1001 kHz	999 kHz

b) Stepen modulacije i vremenski oblik onog dijela struje  $i(t)$  koji predstavlja amplitudski modulisan signal

Komponente na učestanostima  $f_0$ ,  $f_0 + f_m$  i  $f_0 - f_m$  obrazuju konvencionalni amplitudski modulisan signal (KAM) oblika. Na osnovu (1) se može pisati:

$$i_{KAM}(t) = a_1 U_0 \cos \omega_0 t + 2a_2 U_0 U_m \cos \omega_0 t \cos \omega_M t = (a_1 U_0 + 2a_2 U_0 U_m \cos \omega_M t) \cos \omega_0 t \quad (5)$$

Na osnovu (5) možemo zaključiti da u amplitudi  $\cos \omega_0 t$  funkcije imamo amplitudu nosioca + ono što je promjena modulišućeg signala.

U opštem slučaju,  $f_{KAM}(t)$  možemo zapisati kao:

$$f_{KAM}(t) = U_0(1 + m_0 m(t)) \cos \omega_0 t \quad (6)$$

Gdje je  $m_0 = \frac{U_m}{U_0}$ , odnosno indeks (stepen) modulacije koji nam govori koliko se mijenja signal oko maksimalne vrijednosti nosioca, a  $m(t) \leq 1$  opisuje promjene modulišućeg signala.

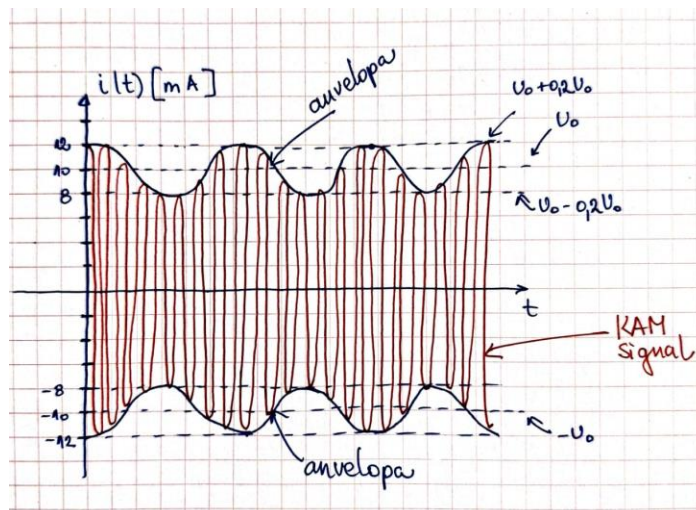
Prema tome, (5) se može zapisati i kao:

$$i_{KAM}(t) = a_1 U_0 \left( 1 + 2 \frac{a_2}{a_1} U_m \cos \omega_M t \right) \cos \omega_0 t \quad (7)$$

Na osnovu (6) i (7) možemo zaključiti da je indeks modulacije:

$$m_0 = 2 \frac{a_2}{a_1} U_m = 0.2$$

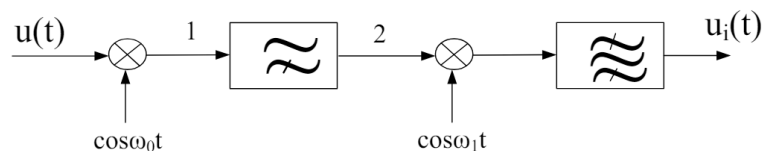
Kako je vrijednost nosioca  $a_1 U_0 = 10 \text{ mA}$  a indeks modulacije 0.2 (što znači da oko vrijednosti amplitude nosioca imamo varijacije od 20% vrijednosti nosioca koje se mijenjaju u skladu sa  $m(t)$ ), anvelopa će biti u opsegu  $8 \div 12 \text{ mA}$ , odnosno  $(-12 \div -8 \text{ mA})$ ). Prilikom crtanja KAM signala, najjednostavnije je krenuti od crtanja anvelope, koja u ovom slučaju prati funkciju  $\cos \omega_M t$ , dok su njene varijacije već opisane. Nakon toga se crta i KAM modulicani signal koji u ovom slučaju prati funkciju  $\cos \omega_0 t$  čije vrijednosti amplituda prate anvelopu. Na slici ispod je prikazan približno vremenski oblik datog KAM signala. Voditi računa da je  $\omega_M \ll \omega_0$ .



Za  $m_0 > 1$  dobio bi se premodulisani KAM signal.

**Za vježbu nacrtati KAM signal u situacijama kada je  $m_0 = 1$  i  $m_0 > 1$ .**

2. Na slici je prikazana blok šema uređaja za dobijanje AM-1BO signala. Svi sklopovi su idealni. Spektar signala  $u(t)$  ograničen je i nalazi se u opsegu od  $f_N = 0.3 \text{ kHz}$  do  $f_V = 3.4 \text{ kHz}$ .
- Nacrtati spektar signala na izlazu iz svih sklopova u šemi.
  - Izračunati minimalnu učestanost  $f_0$ .
  - Koliko iznosi granična učestanost filtra propusnika visokih učestanosti kada  $f_0$  ima vrijednost određenu pod b).
  - Spektar signala na izlazu se nalazi u opsegu od 12.3 kHz do 15.4 kHz. Izračunati vrijednost učestanosti  $f_1$  ako je signal na izlazu iz 1) gornjeg, 2) donjeg bočnog opsega, a  $f_0$  je kao pod b).



Rješenje:

- Na slici 1 prikazane su slike spektara signala na svim izlazima.  
U tački 1, spektar signala će zbog množenja sa  $\cos \omega_0 t$  biti pomjeren lijevo i desno za  $f_0$  (pogledati vježbe: Harmonijska analiza aperiodičnih signala, zadatak 3). Kako je naredni sklop filter propusnik visokih učestanosti, u tački 2 signal će zadržati samo gornji bočni opseg, što je prikazano sa  $|U_2(jf)|$ . Nakon množenja sa  $\cos \omega_1 t$ , spektar iz tačke 2 će biti pomjeren lijevo i desno za  $f_1$ , što je prikazano sa  $|U_3(jf)|$ . Na kraju, u zavosnosti od toga da li će filter propusnik opsega učestanosti da propusti gornji ili donji bočni opseg, spektar signala na izlazu će biti  $|U_{41}(jf)|$  ili  $|U_{42}(jf)|$ .

- Minimalna učestanost  $f_0$ :

U opštem slučaju, da ne bi došlo do preklapanja na osnovu  $|U_1(jf)|$  treba da važi:

$$f_0 - f_V \geq -f_0 + f_N$$

Ipak, kako je nama potreban samo gornji bočni opseg, jer će filter propusnik visokih učestanosti samo njega da ostavi, samo na gornjem bočnom opsegu ne smije doći do preklapanja, pa treba da važi relacija:

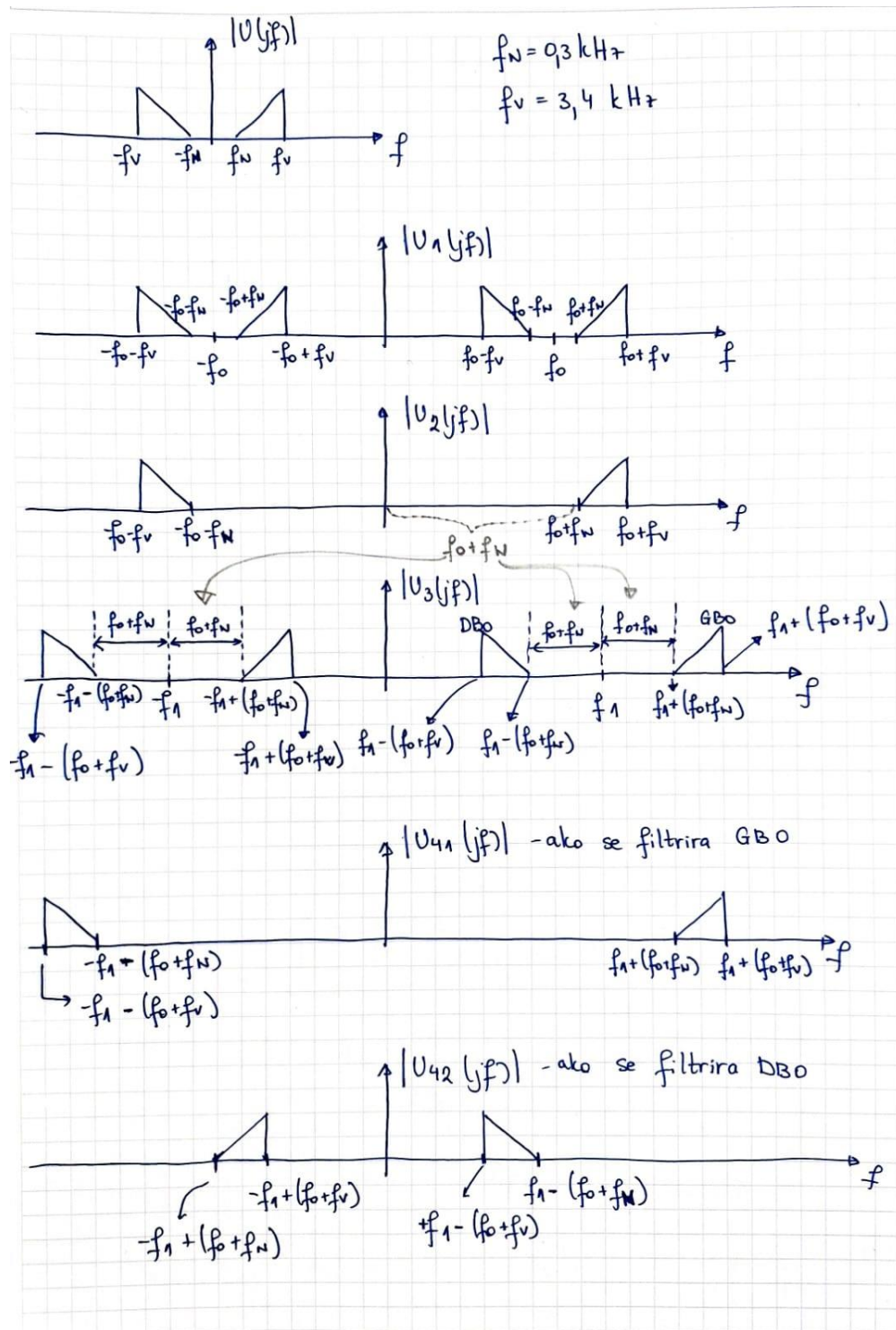
$$f_0 + f_N \geq -f_0 + f_V \quad (8)$$

Odnosno  $f_{0min} = \frac{f_V - f_N}{2} = 1.55 \text{ kHz}$

- Tada će granična učestanost filtra propusnika visokih učestanosti iznositi:

$$f_{c1} = f_{0min} + f_N = 1.85 \text{ kHz} \quad (9)$$

- Dato je da se spektar signala na izlazu treba nalaziti u opsegu od 12.3 kHz do 15.4 kHz.  
Ako izdvajamo samo 1) gornji bočni opseg, treba da važi da je:  $f_1 + (f_{0min} + f_N) = 12.3 \text{ kHz}$ , pa je  $f_1 = 10.45 \text{ kHz}$ .  
Ako izdvajamo samo 2) donji bočni opseg, treba da važi da je:  $f_1 - (f_{0min} + f_V) = 12.3 \text{ kHz}$ , pa je  $f_1 = 17.25 \text{ kHz}$ .



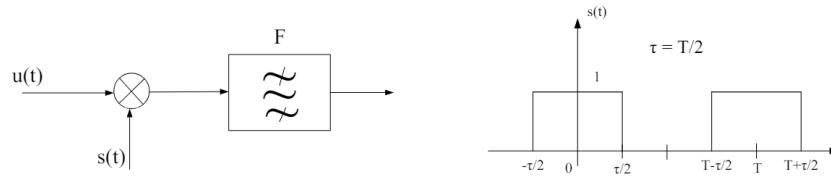
Slika 1.

3. Spektar  $U(j\omega)$  signala  $u(t)$  je ograničen i nalazi se u opsegu učestanosti  $|f| \leq f_m$ . Ovaj signal se množi periodičnom povorkom pravougaonih impulsa  $s(t)$  i propušta kroz idealni filtar F propusnik opsega učestanosti. Za signal  $s(t)$  i propusni opseg filtra F od  $14f_m$  do  $16f_m$ , pronaći spektar signala na izlazu iz filtra i reći kako je modulisan signal ako je:

a)  $T = 1/4f_m$

b)  $T = 1/7f_m$

c)  $T = 1/5f_m$



Rješenje:

Kompleksni spektar  $S_n$  signala  $s(t)$  možemo predstaviti kao:

$$S_n = \frac{E\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} e^{-jn\omega_0(t_1 + \frac{\tau}{2})} \quad (10)$$

Gdje je  $E = 1$ ,  $\tau = T/2$  i  $t_1 = -\tau/2$ .

Periodična povorka impulsa  $s(t)$  se prema tome može predstaviti kao:

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|S_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (11)$$

Važi da je:

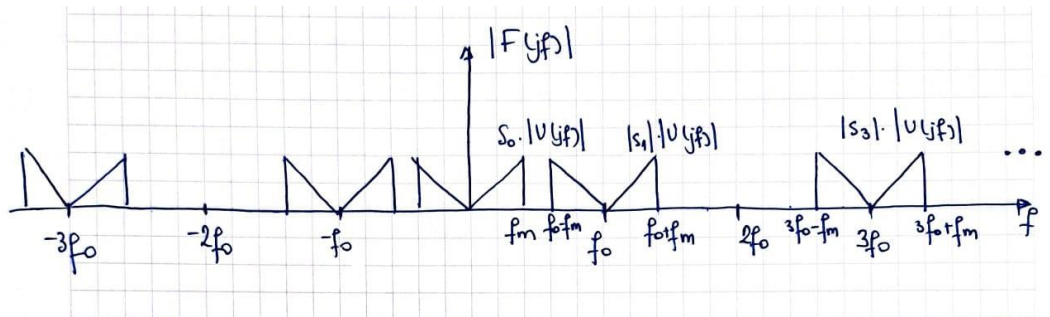
$$|S_n| = \begin{cases} \frac{1}{2}, n = 0 \\ \frac{1}{|n\pi|}, n = \pm 1, \pm 3, \dots \\ 0, n = \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases} \quad (12)$$

(Za detaljno izvođenje pogledati vježbe: Harmonijska analiza periodičnih signala)

Nakon množenja signala  $u(t)$  i  $s(t)$ , dobija se:

$$f(t) = u(t) s(t) = S_0 u(t) + u(t) \sum_{n=1}^{\infty} 2|S_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (13)$$

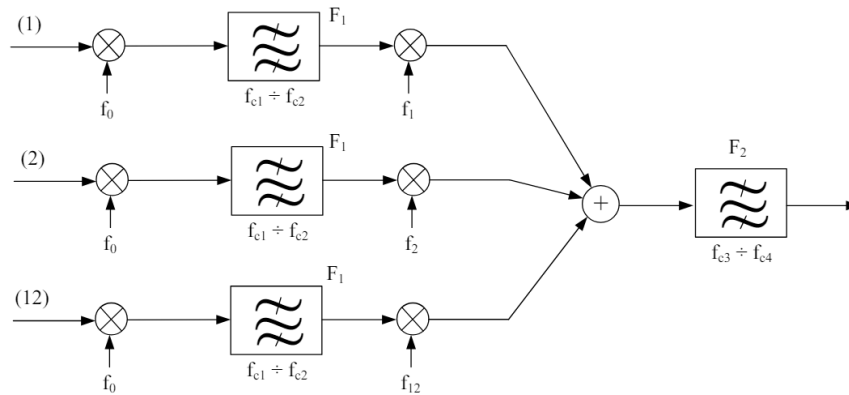
Amplitudski spektar  $|F(jf)|$  signala  $f(t)$  je prikazan na slici 2.



Slika 2.

- a) Spektar signala na izlazu iz filtra F (propusnika opsega učestanosti) koji propušta od  $14f_m$  do  $16f_m$  ako je  $T = 1/4f_m$ .  
 Važi da je  $f_0 = 4f_m$ . Prema tome,  $2f_0 = 8f_m$ ,  $3f_0 = 12f_m$ , a  $4f_0 = 16f_m$ ...  
 Nenulte vrijednosti amplitudskog spektra su na učestanostima:  $0 \div f_m$ ,  $3f_m \div 5f_m$ ,  $11f_m \div 13f_m$ ,  $19 \div 21f_m$ ...  
 Na osnovu ovoga možemo zaključiti da u opsegu  $14f_m \div 16f_m$  ne prolazi ništa.
- b) Spektar signala na izlazu iz filtra F (propusnika opsega učestanosti) koji propušta od  $14f_m$  do  $16f_m$  ako je  $T = 1/7f_m$ .  
 Nenulte vrijednosti amplitudskog spektra su na učestanostima:  $0 \div f_m$ ,  $6f_m \div 8f_m$ ,  $20f_m \div 22f_m$ ...  
 Na osnovu ovoga možemo zaključiti da u opsegu  $14f_m \div 16f_m$  ne prolazi ništa.
- c) Spektar signala na izlazu iz filtra F (propusnika opsega učestanosti) koji propušta od  $14f_m$  do  $16f_m$  ako je  $T = 1/5f_m$ .  
 Nenulte vrijednosti amplitudskog spektra su na učestanostima:  $0 \div f_m$ ,  $4f_m \div 6f_m$ ,  $14f_m \div 16f_m$ ...  
 Na osnovu ovoga možemo zaključiti da prolazi komponenta na učestanosti  $3f_0 = 15f_m$ , a kako je propusni opseg  $14f_m \div 16f_m$ , proći će i gornja i donja bočna komponenta.

4. Od signala iz 12 telefonskih kanala obrazuje se multipleksni signal na principu frekvencijske raspodjele kanala. Blok šema uređaja u kome se obrazuje multipleksni signal prikazana je na slici ispod. Svi produktni modulatori i filtri su idealni. Potrebno je da na izlazu uređaja kanali budu smješteni u opsegu učestanosti od  $f_{c3} = 60 \text{ kHz}$  do  $f_{c4} = 108 \text{ kHz}$ , pri čemu je spektar signala u svakom od njih u obrnutom položaju i zauzima opseg učestanosti širine  $4 \text{ kHz}$ .
- a) Pod uslovom da se filtrima  $F_1$  čiji je propusi opseg  $f_{c2} - f_{c1} = 4 \text{ kHz}$  izdvaja gornji bočni opseg, pronaći:
- Minimalnu vrijednost učestanosti  $f_0$  tako da se poslije druge modulacije jednim zajedničkim filtrom  $F_2$  mogu potisnuti bočni opsezi iz svih kanala.
  - Učestanosti nosilaca  $f_1, f_2, \dots, f_{12}$  kada je  $f_0$  tako izabrana da predstavlja najniži mogući harmonik učestanosti  $4 \text{ kHz}$ .
  - Granične učestanosti filtra  $F_1$  ( $f_{c1}, f_{c2}$ ).
- b) **Za vježbu ponoviti postupak iz tačke a) za slučaj da se filtrom  $F_1$  izdvaja niži bočni opseg.**



Rješenje:

a) Kako bi se pronašle tražene frekvencije, potrebno je vidjeti koji uslovi moraju biti zadovoljeni. Na slici 2 su prikazani spektri signala na izlazu iz svakog sklopa (ako posmatramo samo prvu granu). Nakon množenja sa prostoperiodičnom funkcijom frekvencije  $f_0$ , spektar originalnog signala će biti pomjeren na tu frekvenciju. Nakon toga, tekst zadatka kaže da je filtrom  $F_1$  potrebno izdvojiti GBO, nakon čega slijedi još jedno množenje sa prostoperiodičnom funkcijom ali ovog puta frekvencije  $f_1$ , čime se spektar prethodno filtriranog signala pomjera na frekvenciju  $f_1$ . Tekstom zadatka je rečeno da spektar na izlazu treba da bude u obrnutom položaju, što znači da treba izdvojiti DBO. Kada u obzir uzmemo i ostale grane, ono što se želi postići ovom šemom prikazano je na slici 3.

i) Prema poslednjem spektru sa slike 2 i spektru sa slike 3, potrebno je da budu ispunjeni sledeći uslovi:

1. Granična učestanost  $f_{c3}$  treba da odgovara najnižoj tački spektra funkcije iz grane (1), odnosno treba da važi da je:

$$f_1 - (f_0 + f_m) = f_{c3} = 60 \text{ kHz} \quad (14)$$

2. Granična učestanost  $f_{c4}$  treba da omogući da se potisnu svi neželjeni gornji bočni opsezi, odnosno treba da važi da je:

$$f_1 + f_0 \geq f_{c4} = 108 \text{ kHz} \quad (15)$$

Ako se iz (14) izrazi  $f_1$  i uvrsti u (15) slijedi da je:

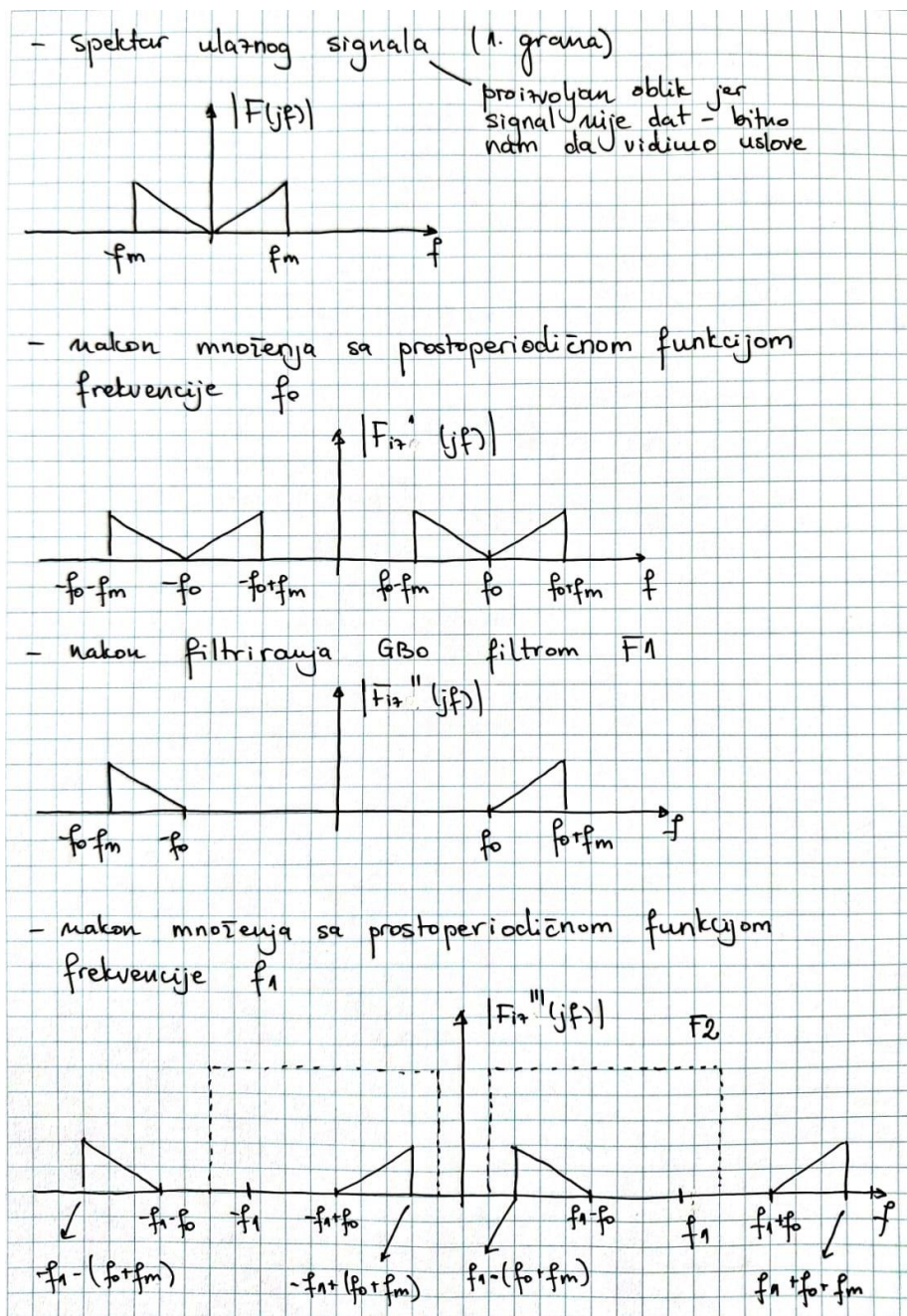
$$f_0 \geq 22 \text{ kHz}$$

ii) Kako  $f_0$  treba da bude izabrana tako da predstavlja najniži mogući harmonik učestanosti 4 kHz, uzećemo da je  $f_0 = 24 \text{ kHz}$ .

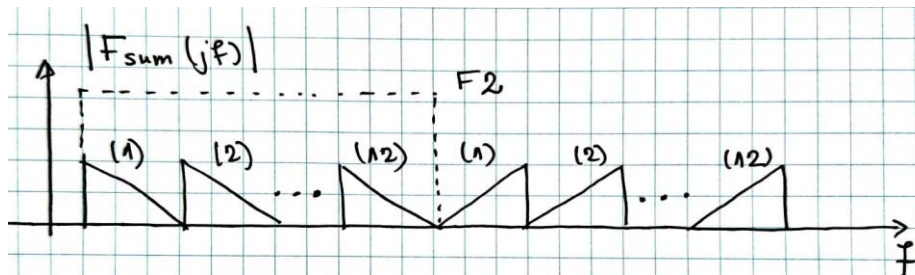
Na raspolaganju imamo ukupno  $108-60=48 \text{ kHz}$  spektra, što znači da spektri signala iz 12 grana moraju da budu poređani odmah jedan do drugog (maksimalna frekvencija svakog pojedinačnog je 4 kHz). Ako u (14) uvrstimo da je  $f_0 = 24 \text{ kHz}$ , slijedi da je:  $f_1 = 88 \text{ kHz}$ ;  $f_2 = f_1 + f_m = 92 \text{ kHz}$  ..., odnosno, u opštem slučaju,  $f_i = f_0 + (i - 1)f_m$ , gdje je  $i = 1, 2, \dots, 12$ .

iii) Filtrom  $F_1$  treba da se dobije gornji bočni opseg (kako je prikazano na slici 2), pa prema izračunatim vrijednostima,  $f_{c1} = f_0 = 24 \text{ kHz}$ , dok je  $f_{c2} = f_0 + f_m = 28 \text{ kHz}$ .





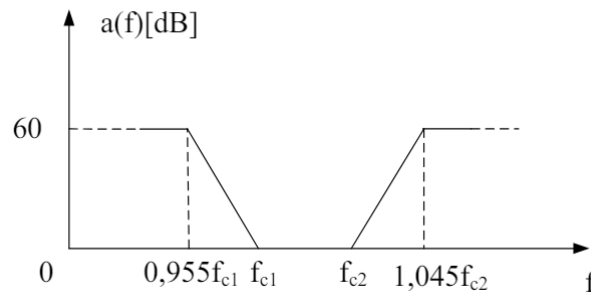
Slika 2.



Slika 3.



5. Na ulaz predajnika AM-1BO signala dovodi se govorni signal čiji spektar zauzima opseg od 300 Hz do 3400 Hz. Spektar modulisanog signala na izlazu iz predajnika treba da zauzima opseg od 480.3 kHz do 483.4 kHz. Pri tome se zahtijeva da amplituda svake komponente u spektru potisnutog bočnog opsega bude za 60 dB manja od odgovarajuće komponente iz korisnog bočnog opsega. Za dobijanje AM-1BO signala stoje na raspolaganju produktni modulatori i filtri propusnici opsega učestanosti čije karakteristike slabljenja imaju oblik kao na slici ispod.
  - a) Pokazati da se pomoću produktnog modulatora i jednog filtra ne mogu ispuniti postavljeni zahtjevi.
  - b) Pokazati da se postavljeni zahtjevi mogu ostvariti dvostrukom modulacijom pomoću dva produktna modulatora koji se napajaju nosiocima različitih učestanosti i na čijim izlazima se nalaze odgovarajući filtri.
  - c) Nacrtati blok šemu predajnika i označiti vrijednosti učestanosti nosioca kao i granične učestanosti filtra.

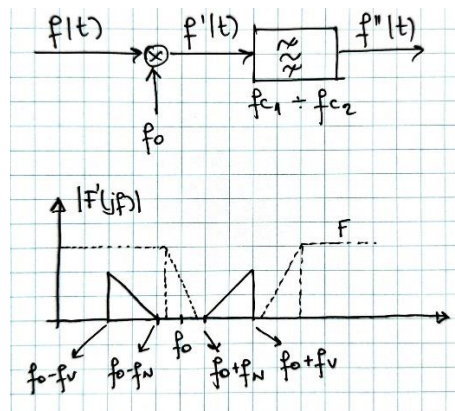


Rješenje:

- a) Na osnovu teksta zadatka, neželjeni bočni opseg se smatra potisnutim ako je oslabljen za 60 dB u odnosu na opseg koji se propušta. Kako u tekstu zadatka nije navedeno da li se traži GBO ili DBO, iako su postupci dokazivanja da nisu dovoljni samo jedan modulator i filter slični, biće dokazano za oba slučaja.
  - i) Uzmimo da je potrebno izdvajati GBO. Na slici ispod prikazani su blok šema predajnika sa jednim modulatorom i jednim filtrom i spektar signala nakon množenja sa prostoperiodičnom funkcijom. Takođe, važi da je:

$$|F(jf)| = \begin{cases} |F(jf)|, & f_N \leq |f| \leq f_V \\ 0, & \text{za ostalo } f \end{cases}$$

Po uslovu zadatka,  $f_N = 0.3 \text{ kHz}$ ,  $f_V = 3.4 \text{ kHz}$

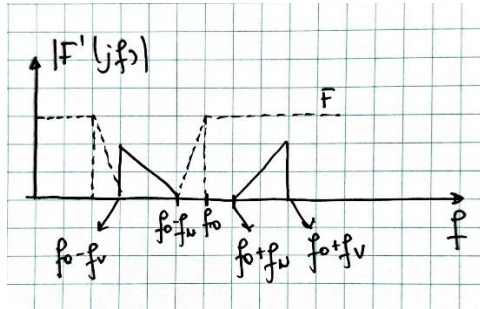


Da bi cio dio neželjenog DBO spektra bio dovoljno potisnut, zbog prelaznog dijela prenosne funkcije potrebno je da bude ispunjen uslov da taj prelazni dio bude širok makar onoliko koliko su odvojeni opsezi, odnosno treba da važi da je:

$$f_{c1} - 0.955 f_{c1} \geq 2f_N \quad (16)$$

Znamo da signal na izlazu predajnika treba da zauzima opseg od 480.3 do 483.4 kHz, pa je prema tome u (16) potrebno uvrstiti da je  $f_{c1} = 480.3 \text{ kHz}$  a  $f_N = 0.3 \text{ kHz}$ . Kada se to uvrsti, dobija se da je  $17.11 \text{ kHz} \geq 0.6 \text{ kHz}$ , što nije tačno odnosno uslov nije ispunjen.

ii) Slična situacija će biti i za slučaj kada je potrebno izdvojiti DBO:



Pri čemu, sada treba da važi da je:

$$1.045f_{c2} - f_{c2} \geq 2f_N$$

Kada se uvrsti da je  $f_{c2} = 483.4 \text{ kHz}$  a  $f_N = 0.3 \text{ kHz}$ , opet se zaključuje da uslov nije ispunjen.

Na osnovu prethodnog, zaključujemo da se pomoću produktnog modulatora i jednog filtra ne mogu ispuniti postavljeni zahtjevi.

b) Predajnik sa dvostrukom modulacijom i odgovarajućim filtrima kao i spektri signala prikazani su na slici 4.

Za prvi filter treba da važi da je:

$$2f_N \geq 0.045f_{c1} = 0.045(f_1 + f_N) \quad (17)$$

Za drugi filter treba da važi da je:

$$2(f_1 + f_N) \geq 0.045f_{c3} = 0.045(f_2 + f_1 + f_N) \quad (18)$$

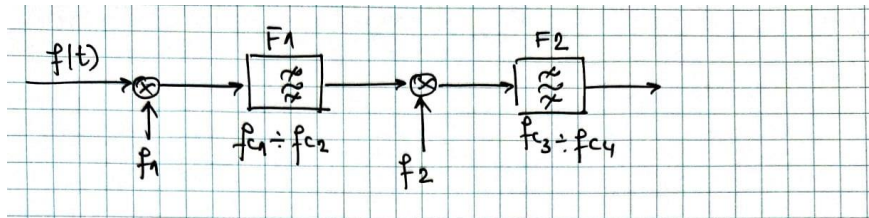
Pri čemu poznato je  $f_{c3} = 480.3 \text{ kHz}$

Iz (17) imamo da treba da važi da je  $f_1 \leq 13 \text{ kHz}$ , dok iz (18) imamo da je  $f_1 \geq 10.5 \text{ kHz}$ . Na osnovu toga zaključujemo da se postavljeni zahtjevi mogu ostvariti dvostrukom modulacijom i odgovarajućim filtrima.

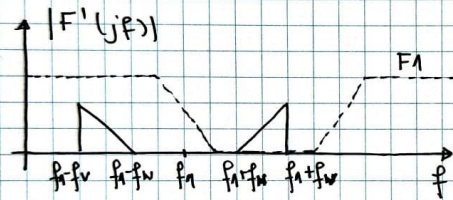
c) Ukoliko uzmemo da je  $f_1 = 12 \text{ kHz}$ , ostale učestanosti imaju vrijednosti:

$$\begin{aligned} f_{c1} &= 12 \text{ kHz} \\ f_{c2} &= 15.1 \text{ kHz} \\ f_{c3} &= 480.3 \text{ kHz} \\ f_{c4} &= 483.4 \text{ kHz} \\ f_2 &= 468 \text{ kHz} \end{aligned}$$

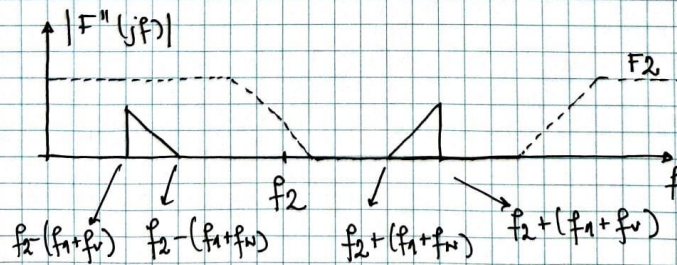
Dok je šema predajnika nacrtana na sledećoj slici.



- spekter signala nakon množenja sa prostoperiodičnom funkcijom frekvencije  $f_1$  (isprekidanom linijom označen  $F_1$ )



- spekter signala nakon množenja sa prostoperiodičnom funkcijom frekvencije  $f_2$  (isprekidanom linijom označen  $F_2$ )



Slika 4.